信号与系统 复习资料

A 卷

一、填空题（本题满分 30 分，共含 4 道小题，每空 2 分）

1. 两个有限长序列 $x_1(n)$，$0\leqslant n\leqslant 33$ 和 $x_2(n)$，$0\leqslant n\leqslant 36$，做线性卷积后结果的长度是 70 ，若对这两个序列做 64 点圆周卷积，则圆周卷积结果中 n= 6 至 63 为线性卷积结果。

2. DFT 是利用 W_N^{nk} 的 对称性 、 可约性 和 周期性 三个固有特性来实现 FFT 快速运算的。

3. IIR 数字滤波器设计指标一般由 ω_c、ω_{st}、δ_c 和 δ_{st} 等四项组成。（Ω_c Ω_{st} δ_c δ_{st}）

4. FIR 数字滤波器有 窗函数法 和 频率抽样设计法 两种设计方法，其结构有 横截型(卷积型/直接型) 、 级联型 和 频率抽样型（线性相位型） 等多种结构。

二、判断题（本题满分 20 分，共含 10 道小题，每小题 2 分，正确打√，错误打×）

1. 相同的 Z 变换表达式一定对应相同的时间序列。（×）
2. Chirp-Z 变换的频率采样点数 M 可以不等于时域采样点数 N。（√）
3. 按频率抽取基 2 FFT 首先将序列 x(n)分成奇数序列和偶数序列。（×）

4. 冲激响应不变法不适于设计数字带阻滤波器。（√）

5. 双线性变换法的模拟角频率 Ω 与数字角频率 ω 成线性关系。(×)

6. 巴特沃思滤波器的幅度特性必在一个频带中（通带或阻带）具有等波纹特性。（×）

7. 只有 FIR 滤波器才能做到线性相位，对于 IIR 滤波器做不到线性相位。（×）

8. 在只要求相同的幅频特性时，用 IIR 滤波器实现其阶数一定低于 FIR 阶数。（ √ ）

9. 具有递归结构特点的滤波器不一定是 IIR 滤波器。（ √ ）

10. 线性相位系统对各个频率分量的延迟是相同的。（ √ ）

三、计算题（本题满分 30 分，每小题 10 分）

1. 已知 $X(z)=\dfrac{5-7z^{-1}}{2-5z^{-1}+2z^{-2}}$，求出对应 X(z)的各种可能的序列表达式。

解： $X(z)$有两个极点：$z_1=0.5$，$z_2=2$， 因为收敛域总是以极点为界，因此收敛域有三种情况： $|z|<0.5$，$0.5<|z|<2$，$2<|z|$。对应三种不同的原序列。 -----------3 分

$$x(n)=-\mathrm{Res}[F(z),0.5]-\mathrm{Res}[F(z),2]$$

$$=-\frac{(5z-7)z^n}{2(z-0.5)(z-2)}(z-0.5)\Big|_{z=0.5}-\frac{(5z-7)z^n}{2(z-0.5)(z-2)}(z-2)\Big|_{z=2}$$

$$=-[3\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}+2^n]u(-n-1)$$

$$x(n)=3\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}u(n)-2^{n}u(-n-1)$$

$$x(n)=\left[3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+2^{n}\right]u(n)$$

2. 用 Z 变换法解下列差分方程：y(n)－0.9y(n－1)=0.05u(n)，n < 0 时 y(n)=0。

解：

$$Y(z)-0.9Y(z)z^{-1}=0.05\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z)=\frac{0.05}{(1-0.9z^{-1})(1-z^{-1})}$$

$$y(n)=\mathrm{Res}[F(z),0.9]+\mathrm{Res}[F(z),1]=\frac{0.05}{-0.1}(0.9)^{n+1}+\frac{0.05}{0.1}$$

$$=-0.5\cdot(0.9)^{n+1}+0.5$$

n<0 时， $y(n)$=0

最后得到 $y(n)$=［－0.5 · $(0.9)^{n+1}$+0.5］$u(n)$

3. 如果一台计算机的速度为平均每次复乘 5μS，每次复加 0.5μS，用它来计算 512 点的 DFT[x(n)]，问直接计算需要多少时间，用 FFT 运算需要多少时间。

解：

1、 直接计算

复乘所需时间 $T_1=5\times10^{-6}\times N^2=5\times10^{-6}\times512^2=1.31072s$

复加所需时间 $T_1=0.5\times10^{-6}\times N\times(N-1)=0.5\times10^{-6}\times512\times511=0.130816s$

所以 $T=T_1+T_2=1.441536s$

2、用 FFT 计算

复乘所需时间 $T_1 = 5\times10^{-6}\times\frac{N}{2}\log_2 N = 5\times10^{-6}\times\frac{512}{2}\log_2 512 = 0.01152s$

复加所需时间 $T_2 = 0.5\times10^{-6}\times N\log_2 N = 0.5\times10^{-6}\times512\log_2 512 = 0.002304s$

所以 $T = T_1 + T_2 = 0.013824s$

四、设计题（本题满分 20 分）

设计一个数字低通滤波器，要求 3dB 的截止频率 $f_c=1/\pi$ Hz，抽样频率 $f_s=2$ Hz。

1. 导出归一化的二阶巴特沃思低通滤波器的系统函数 $H_{an}(s)$。
2. 试用上述指标设计一个二阶巴特沃思模拟低通滤波器，求其系统函数 $H_a(s)$，并画出其零极点图。
3. 用双线性变换法将 $H_a(s)$ 转换为数字系统的系统函数 $H(z)$。
4. 画出此数字滤波器的典范型结构流图。

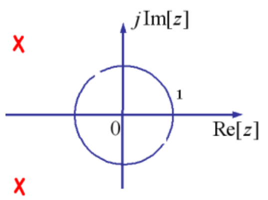
答：（1）其 4 个极点分别为： $s_k = \Omega_c e^{j(\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N})\pi} = e^{j(\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{4})\pi}$ $\qquad k=0,1,2,3$

$$H_{an}(s) = \frac{1}{(s-e^{j\frac{3\pi}{4}})(s-e^{j\frac{5\pi}{4}})} = \frac{1}{(s+\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2})(s+\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}$$

（2）$\Omega_c = 2\pi f_c = 2 \quad rad/s$

$$H_a(s) = H_{an}(\frac{s}{\Omega_c}) = H_{an}(\frac{s}{2}) = \frac{4}{s^2+2\sqrt{2}s+4}$$

零极点图：



（3）

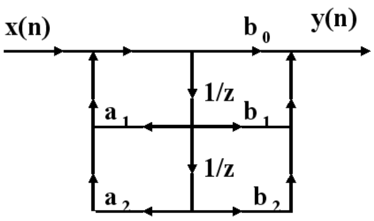
$$H(z)=H_a(s)\big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=H_a(4\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})$$

$$=\frac{(1+z^{-1})^2}{4(1-z^{-1})^2+2\sqrt{2}(1+z^{-1})(1-z^{-1})+(1+z^{-1})^2}=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{5+2\sqrt{2}-6z^{-1}+(5-2\sqrt{2})z^{-2}}$$

（4）

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{5+2\sqrt{2}-6z^{-1}+(5-2\sqrt{2})z^{-2}}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1-a_1z^{-1}-a_2z^{-2}}$$

$$a_1=\frac{6}{5+2\sqrt{2}}\quad a_2=-\frac{5-2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}}\quad b_0=\frac{1}{5+2\sqrt{2}}\quad b_1=\frac{2}{5+2\sqrt{2}}\quad b_2=\frac{1}{5+2\sqrt{2}}$$



B 卷

五、填空题（本题满分 30 分，共含 5 道小题，每空 2 分）

1. 一稳定 LTI 系统的$H(z)=\dfrac{1+2z^{-1}+3z^{-2}}{(1+2z^{-1})(1+z^{-1}+0.25z^{-2})}$，$H(z)$的收敛域为 <u>0.5<|z|<2</u>，该系统是否为因果系统<u>　否（双边序列）　</u>。

2. 已知一个滤波器的$H(z)=\dfrac{1-z^{-1}}{1+0.9z^{-1}}$，试判断滤波器的类型(低通，高通，带通，带阻)<u>　高通　</u>。如不改变其幅频特性只改变相位，可以级联一个<u>　全通　</u>系统。

3. IIR 数字滤波器有<u>冲击响应不变法</u>、<u>阶跃响应不变法</u>和<u>双线性变换法</u>三种设计方法，其结构有<u>直接 I 型</u>、<u>直接 II 型</u>、<u>级联型</u>和<u>并联型</u>等多种结构。

4. 设计切比雪夫滤波器就是根据设计指标计算<u>　N　</u>和<u>　ε　</u>。

5. FIR 滤波器的窗函数设计法中，滤波器的过渡带宽度与窗函数的<u>形状和长度</u>有关，阻带衰减与窗函数的<u>形状</u>有关。

六、判断题（本题满分 20 分，共含 10 道小题，每小题 2 分，正确打√，错误打×）

11. 按频率抽取基 2 FFT 首先将序列 x(n)分成奇数序列和偶数序列。（×）

12. 冲激响应不变法不适于设计数字带阻滤波器。（√）

13. 周期分别为 N1,N2 的两个离散序列，在进行周期卷积后，其结果也是周期序列。（√）

14. Chirp-Z 变换的频率采样点不必在单位圆上。（√）

15. 考虑到 DFT 的栅漏效应，采集数据时采集数据的点数越多（即 N 值越大）越好。(×)

16. 若全通系统的极点在单位圆内，其零点一定在单位圆外与极点关于单位圆成镜像对称。（√）

17. 冲激响应不变法不能设计数字高通滤波器。（√）

18. 切比雪夫数字滤波器的幅度特性必在一个频带中（通带或阻带）具有等波纹特性。（√）

19. 只有 FIR 滤波器才能做到线性相位，对于 IIR 滤波器做不到线性相位。（×）

20. 在只要求相同的幅频特性时，用 IIR 滤波器实现其阶数一定低于 FIR 阶数。（ √ ）

七、计算题（本题满分 30 分，每小题 10 分）

1. 用 Z 变换法解下列差分方程：y(n)－0.9y(n－1)=0.05u(n)，n < 0 时 y(n)=0。

解：

$$Y(z)-0.9Y(z)z^{-1}=0.05\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z)=\frac{0.05}{(1-0.9z^{-1})(1-z^{-1})}$$

$$y(n)=\mathrm{Res}[F(z),0.9]+\mathrm{Res}[F(z),1]=\frac{0.05}{-0.1}(0.9)^{n+1}+\frac{0.05}{0.1}$$

$$=-0.5\cdot(0.9)^{n+1}+0.5$$

$n<0$ 时， $y(n)=0$

最后得到 $y(n)=[-0.5\cdot(0.9)^{n+1}+0.5]u(n)$

2. 如果一台计算机的速度为平均每次复乘 5μS，每次复加 0.5μS，用它来计算 512 点的 DFT[x(n)]，问直接计算需要多少时间，用 FFT 运算需要多少时间。

解：

1、 直接计算

复乘所需时间 $T_1=5\times10^{-6}\times N^2=5\times10^{-6}\times512^2=1.31072s$

复加所需时间 $T_1=0.5\times10^{-6}\times N\times(N-1)=0.5\times10^{-6}\times512\times511=0.130816s$

所以 $T=T_1+T_2=1.441536s$

2、用 FFT 计算

复乘所需时间 $T_1=5\times10^{-6}\times\frac{N}{2}\log_2 N=5\times10^{-6}\times\frac{512}{2}\log_2 512=0.01152s$

复加所需时间 $T_2=0.5\times10^{-6}\times N\log_2 N=0.5\times10^{-6}\times512\log_2 512=0.002304s$

所以 $T=T_1+T_2=0.013824s$

3. 设序列 x(n)={4，3，2，1} ， 另一序列 h(n) ={1，1，1，1}，n=0,1,2,3

（1）试求线性卷积 y(n)=x(n)*h(n)

（2）试求 6 点圆周卷积。

（3）试求 8 点圆周卷积。

解：

1、y(n)=x(n)*h(n)={4,7,9,10,6,3,1}

2、6 点圆周卷积={5,7,9,10,6,3}

3、8 点圆周卷积={4,7,9,10,6,3,1,0}

八、设计题（本题满分 20 分）

设低通滤波器通带 3dB 截止频率为 Ω_c=2rad/s，抽样频率为 Ω_s=2πrad/s。

1、请写出二阶巴特沃兹低通滤波器的幅度平方函数表达式 $|H_a(j\Omega)|^2$ 。

2、由幅度平方函数 $|H_a(j\Omega)|^2$ 可求出，其 4 个极点分别为：$+\sqrt{2}\pm j\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}\pm j\sqrt{2}$，试求稳定的二阶巴特沃兹低通滤波器系统函数 $H_a(s)$ 。

3、试用双线性变换法将 $H_a(s)$转换为相应的数字滤波器 H(z)。

4、比较冲激响应不变法和双线性变换法的优缺点。

答：

（1）$$\left|H_a(j\Omega)\right|^2=\frac{1}{1+(\frac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}}=\frac{1}{1+(\frac{\Omega}{2})^4}=\frac{16}{\Omega^4+16}$$

（2）$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^2}{(s+\sqrt{2}-j\sqrt{2})(s+\sqrt{2}+j\sqrt{2})}=\frac{4}{(s+\sqrt{2})^2+2}=\frac{4}{s^2+2\sqrt{2}s+4}$$

（3）$$\begin{aligned}H(z)&=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=H_a(2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})\\&=\frac{4(1+z^{-1})^2}{4(1-z^{-1})^2+4\sqrt{2}(1+z^{-1})(1-z^{-1})+4(1+z^{-1})^2}=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{2+\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})z^{-2}}\end{aligned}$$

（4）冲激响应不变法采用时域模仿逼近，时域抽样必定产生频域的周期延拓，产生频率响应的混叠失真。

双线性变换法，先将 s 域平面压缩到一个中介平面 s1，然后再将 s1 映射到 Z 平面。利用单值映射避免混叠失真，但是采用双线性变换法，使得除了零频率附近，Ω 与 ω 之间产生严重的非线性（畸变）。