

高起本 高等数学 复习资料

A 卷

一. 选择题(本大题共 5 小题, 每题 3 分, 共 15 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} =$ (A)

(A) 1 ; (B) -1 ; (C) 0 ; (D) $\frac{1}{2}$;

2. 设 $y = x^2 \sin x$, 则 $y' =$ (C)

(A) $2x \cos x + x^2 \sin x$; (B) x^2 ; (C) $x^2 \cos x + 2x \sin x$; (D) $2x \sin x$;

3. 若在 $[a, b]$ 上 $f'(x) > 0$ 而 $f''(x) < 0$ 则 $y = f(x)$ 的图形为 (B)

(A) 上升且是凹 ; (B) 上升且是凸 ;

(C) 下降且是凹 ; (D) 下降且是凸的 ;

4. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx =$ (D)

(A) 2 ; (B) ∞ ; (C) 0 ; (D) 1 ;

5. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ 的通解为 (A)

(A) $e^x + e^{-y} = c$; (B) $e^x - e^{-y} = c$; (C) $e^x + e^{-y} = 1$ (D) $e^x - e^{-y} = 1$;

二. 填空题(本大题共 5 小题, 每题 3 分, 共 15 分)

6. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{n})^{kn} = e^{-3}$, 则 $k = \underline{-\frac{3}{2}}$;

7. 已知 $\begin{cases} x = t + \arctan t + 1 \\ y = t^3 + 6t - 2 \end{cases}$ 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\frac{3(1+t^2)}{1+t^2}}$;

8. 曲线 $y = 2x - x^3$ 在点 (1, 1) 处的切线方程为 $x + y - 2 = 0$

$$9. \int \frac{1}{x \ln x} dx = ; \int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} d(\ln x) = \frac{1}{\ln^2 x} + C ;$$

$$10. \int_{-1}^1 \frac{x^2 \tan x + 1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} ;$$

三. 简答题(本大题共 5 小题, 每题 6 分, 共 30 分)

$$11. \text{极根: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right) ;$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - (1 + \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}.$$

$$12. \int \frac{x^4}{1+x^2} dx =$$

$$\int \frac{x^4}{1+x^2} dx = \int \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2} dx = \int [(x^2-1) + \frac{1}{1+x^2}] dx = \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C$$

$$13. \text{求不定积分 } \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$\text{解: } \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{d(e^x)}{1 + (e^x)^2} = \arctan(e^x) + c$$

$$14. \text{计算定积分 } \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos 2x} dx$$

$$\text{解 } \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos 2x} dx = \int_0^\pi \sqrt{2 \cos^2 x} dx = \sqrt{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos x dx \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi \right) = 2\sqrt{2}$$

15. 证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少有一个根;

证明: 令: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ 是初等函数,

所以 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = 1 > 0$; $f(1) = -2 < 0$;

由零点定理可知, 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 0$;

即 ξ 是方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 的一个根;

四. 解答题: (共计 40 分)

16. (本题 5 分) 设 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - ax^2 - x + 4}{x + 1}$ 有有限极限值 l , 求常数 a 和 l ;

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - ax^2 - x + 4}{x + 1} = l, \quad \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = 0,$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - ax^2 - x + 4) = -a + 4 = 0$$

$$\therefore a = 4 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - ax^2 - x + 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 8x - 1) = 10 = l.$$

17. (本题 5 分) 讨论函数: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$ 的特性, 并描绘该函数的图像;

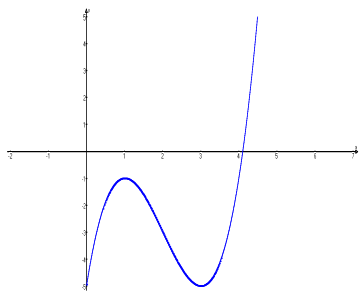
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5 \quad D: (-\infty, +\infty)$$

$$y' = 3x^2 - 12x + 3(x-1)(x-3) ; \quad \text{令 } y' = 0 \quad \text{得驻点: } x_1 = 1, x_2 = 3$$

$$y'' = 6x - 12 ; \quad \text{令 } y'' = 0 \quad x_3 = 3$$

列表;

取辅助点:

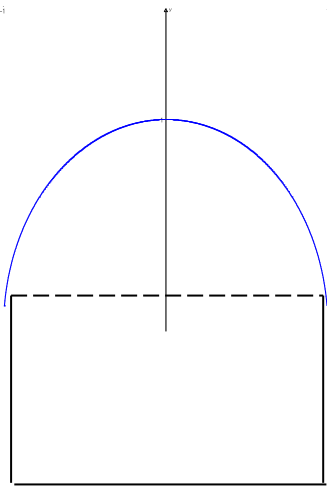


18. (本题 6 分) 设曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx$ 有拐点 $(1, 2)$ ，且拐点处的切线斜率为 -1 ，求常数 a, b, c

解： $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ $y'' = 6ax + 2b$

$$\text{由已知条件，得 } \begin{cases} a + b + c = 2 \\ 3a + 2b + c = -1 \\ 6a + 2b = 0 \end{cases} \quad \text{解，得 } a = 3, b = -9, c = 8$$

19. (本题 6 分) 窗户的形状下部是矩形，上部是半圆形，周长是 15 米，问矩形的宽和高各是多少米，窗户的面积 A 最大；



解：令半圆的半径为 x ，则半圆的周长为 πx ，则矩形的高为

$$h = \frac{15 - 2x - \pi x}{2}, \quad \text{设窗户面积为 } A, \text{ 则}$$

$$A = \frac{1}{2}\pi x^2 + 2x \cdot h = \frac{1}{2}\pi x^2 + 2x \cdot \frac{15-2x-\pi x}{2} = \frac{1}{2}\pi x^2 + (15x - 2x^2 - \pi x^2)$$

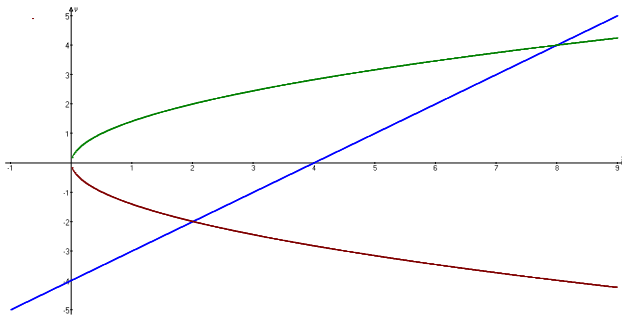
$$A' = \pi x + 15 - 4x - 2\pi x = 15 - (\pi + 4)x$$

得唯一驻点: $x = \frac{15}{\pi+4}$; 又 A 一定存在最大值;

\therefore 当 $x = \frac{15}{\pi+4}$ 时, A 最大; 此时底宽 $2x = \frac{30}{\pi+4}$ (米); 高 $h = \frac{1}{2}(15 - \frac{30}{\pi+4} - \frac{15\pi}{\pi+4}) = \frac{15}{\pi+4}$ (米)

20. (本题 6 分) 计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成的图形的面积

解 (1) 画图



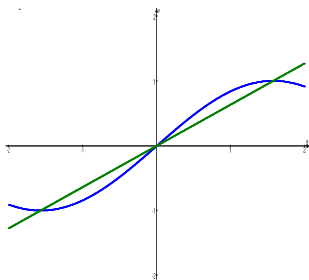
(2) 确定在 y 轴上的投影区间: $[-2 \quad 4]$

(3) 确定左右曲线 $\varphi_{\text{左}}(y) = \frac{1}{2}y^2$, $\varphi_{\text{右}}(y) = y+4$.

(4) 计算积分 $S = \int_{-2}^4 (y+4 - \frac{1}{2}y^2) dy = [\frac{1}{2}y^2 + 4y - \frac{1}{6}y^3]_{-2}^4 = 18$

21. (本题 6 分) 求由曲线 $y = \sin x$, 直线 $y = \frac{2x}{\pi}$ 所围平面图形绕 x 轴

旋转一周所得旋转体的体积.



绕 X 轴旋转一周所得旋转体的体积:

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = \frac{2x}{\pi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\sin x)^2 - (\frac{2x}{\pi})^2] dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{1 - \cos 2x}{2} - (\frac{2}{\pi})^2 x^2] dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{3}(\frac{2}{\pi})^2 x^3 \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{3}(\frac{2}{\pi})^2 \frac{\pi^3}{8} \right] = 2\pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{6}\pi^2 \end{aligned}$$

22. (本题 6 分) 求方程 $\frac{dy}{dx} + y = e^x$ 满足 $y|_{x=0} = 5$ 的特解 ;

$$\frac{dy}{dx} + y = e^x \quad P(x) = 1, \quad Q(x) = e^x$$

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right] = e^{-\int dx} \left[\int e^x \cdot e^{\int dx} dx + C \right] = e^{-x} \left[\int e^x \cdot e^x dx + C \right]$$

$$= e^{-x} \left[\int e^{2x} dx + C \right] = e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^{2x} + C \right) = \frac{1}{2} e^x + C e^{-x}$$

$$y|_{x=0} = 5 \text{ 代入: } 5 = \frac{1}{2} + C \quad C = \frac{9}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} + y = e^x \text{ 满足 } y|_{x=0} = 5 \text{ 的特解为: } y = \frac{1}{2} e^x + \frac{9}{2} e^{-x}$$

- A. 0
 B. $\frac{1}{3}$
 C. $\frac{1}{2}$
 D. 3
10. 若 $\cos 2x$ 是 $g(x)$ 的一个原函数, 则 ()
 A. $\int g(x)dx = \cos 2x + C$
 B. $\int \cos 2x dx = g(x) + C$
 C. $\int g'(x)dx = \cos 2x + C$
 D. $\int (\cos 2x)' dx = g(x) + C$

二、填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

11. 函数 $f(x) = \arcsin(2x-1)$ 的定义域是_____.

12. 已知 $f(x+1) = x^2$, 则 $f(x) =$ _____.

13. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}} =$ _____.

14. 函数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ 的一阶导数为_____.

15. 设 $y = x \sin x$, 则 $y' =$ _____.

16. 函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 的单调递减区间为_____.

17. 曲线 $y = (x-1)^3$ 的拐点是_____.

18. 曲线 $y = \frac{1}{x-1}$ 的水平渐近线为_____.

19. 定积分 $\int_{-2}^3 x dx =$ _____.

20. 设 $f'(x) = 3x^2 - 2x$ 且 $f(0) = 2$, 则 $f(x) =$ _____.

三、计算题 (本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

21. 求 $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1)$

22. 求曲线 $y = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 7$ 的一阶导数

23. 求 a 的值, 使得函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3(x-1)}{x-1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续.

24. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$, 其中 α, β 为常量, 且 $\beta \neq 0$.

25. 求不定积分 $\int \sqrt{x} dx$

26. 求定积分 $\int_0^2 x^2 dx$

四、应用题 (本题 10 分)

27. 求曲线 $y = \ln(x^2 + 1)$ 的拐点及凹凸性

答案:

选择题: CBBDB BDBBA

填空题: 11. $[0, 1]$ 12. $(x-1)^2$ 13. $\frac{1}{e}$ 14. $y' = 6x^2 + 6x - 12$

15. $y' = \sin x + x \cos x$ 16. $[-1, 1]$ 17. $(1, 0)$ 18. $y=0$

19. $\frac{1}{2}$ 20. $x^3 - x^2 + 2$

计算题: 21. 解 $\lim_{x \rightarrow 1} 2x - 1 = \lim_{x \rightarrow 1} 2x - \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 2 - 1 = 1$

22. 解 $y' = (2x^3)' - (5x^2)' + (3x)' - (7)'$
 $= 6x^2 - 10x + 3$

23. 解 如果函数连续, 那么在 $x=1$ 处, 有 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 3(x-1)}{x-1} = a$.

另 $t = x - 1$, 那么 $x = t + 1$

有 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 3(x-1)}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{t} = 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{3t} = 3$

故 $a=3$ 时, 函数 $f(x)$ 连续。

24. 解 这是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 用洛必达法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin \alpha x)'}{(\sin \beta x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \sin \alpha x}{\beta \sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$$

25. 解 因 $\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)' = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

所以 $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

26. 解: 由于 $\frac{x^3}{3}$ 是 x^2 的一个原函数, 所以按牛顿布莱尼兹公式有:

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

27. 解: 函数 $y = \ln(x^2 + 1)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$y'' = \frac{2(x^2 + 1) - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

另 $y'' = 0$, 有 $x_1 = -1, x_2 = 1$ 。 $x_1 = -1, x_2 = 1$ 将定义域划分为 $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$ 。下面给出结论:

x 的范围	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'' 符号	-	0	+	0	-
曲线的拐点及凹凸性	凸	点 $(-1, \ln 2)$ 是拐点	凹	点 $(1, \ln 2)$ 是拐点	凸