高起专 高等数学 2 复习资料

A 卷

一、 定义及性质（共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1、 设向量 r 的空间坐标为(x,y,z)，那么求向量 r 的模的表达式。

$$\mathbf{r}=\sqrt{\mathbf{x^2+y^2+z^2}}$$

2、 设空间两点 A、B 的坐标分别为(x_1,y_1,z_1)和(x_2,y_2,z_2)，那么求 AB 两点的距离表达式。

$$|\mathbf{AB}|=\sqrt{(\mathbf{x_1-x_2})^2+(\mathbf{y_1-y_2})^2+(\mathbf{z_1-z_2})^2}$$

3、 向量的数量积定义

设$\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}$是两个向量，它们的模及夹角的余弦的乘积称为向量$\vec{\mathbf{a}}$与$\vec{\mathbf{b}}$的数量积（又称点积或内积），记做$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}$，即

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\boldsymbol{cos}(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$$

4、 向量的向量积定义

5、 写出椭球面的曲面方程表达式

方程

$$\frac{\mathbf{x}^2}{\boldsymbol{a}^2}+\frac{\mathbf{y}^2}{\boldsymbol{b}^2}+\frac{\mathbf{z}^2}{\boldsymbol{c}^2}=\mathbf{1}\ \ (\mathbf{a}>\mathbf{0},\mathbf{b}>\mathbf{0},\mathbf{c}>\mathbf{0})$$

表示的曲面称为椭球面。

6、 平面的点法式方程表达式。

7、 设$M_0(x_0,y_0,z_0)$是平面 π 上一个确定的点，$M(x,y,z)$是 π 上任一点，向量$n=(A,B,C)$与平面 π 垂直，则求平面的点法式方程表达式。

$$\mathbf{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$

8、如果二元函数$f(x,y)$, 在定义域内都连续，求$\lim\limits_{(x,y)\to x_0,y_0} f(x,y)$。

$$\lim_{(x,y)\to x_0,y_0} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

9、当$f(x,y) \geq 0$时，二重积分的几何意义是什么？

当被积函数$\mathbf{f(x,y) \geq 0}$时，$\iint \mathbf{f(x,y)\,d\sigma}$表示曲顶柱体的体积；当$\mathbf{f(x,y) \leq 0}$时，$\iint \mathbf{f(x,y)\,d\sigma}$表示曲顶柱体体积的负值；当$\mathbf{f(x,y)}$在 D 的若干区域上是正的，而在其他部分区域上市负的，这是二重积分的值就等于各个部分区域上的曲顶柱体体积的代数和。

10、二重积分的中值定理

11、格林公式的定义

设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 P(x, y)及 Q(x, y)在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_{L}Pdx+Qdy$$

其中 L 是 D 的取正向的边界曲线。

12、高斯公式的定义

设空间有界闭合区域Ω，其边界$\partial\Omega$为分片光滑闭曲面。函数 P(x, y, z)，Q(x, y, z)，R(x, y, z)及其一阶偏导数在Ω上连续，那么：

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\oiint_{\partial\Omega}P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

二、计算题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

1. 求下列两点之间的距离。

（1）点（0，0，0）与点（2，-3，-4）；　　（2）点（4，-2，3）与点（-2，1，3）

解：$=\sqrt{2^2+(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{29}$　　$=\sqrt{(4-(-2))^2+((-2)-1)^2+(3-3)^2}=\sqrt{45}$

2、已知两点$M_1(1,3,1)$和$M_2(2,1,3)$，则求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的方向余弦$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$。

解：向量$\overrightarrow{M_1M_2}$**的模为**$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(2-1)^2+(1-3)^2+(3-1)^2}=3$

$$\cos\alpha=\frac{2-1}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}=\frac{1}{3}$$

$$\cos\beta=\frac{1-3}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}=-\frac{2}{3}$$

$$\cos\gamma=\frac{3-1}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}=\frac{2}{3}$$

3、求曲线$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ y=6 \end{cases}$上的点(2, 6, 29)处的切线的斜率。

4、设$f(x,y)=x^4y+y^5x$，则求$\frac{\partial f}{\partial y}$。

解：$\frac{\partial f}{\partial y}=x^4+5y^4x$

三、应用题（共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

计算下列对坐标的曲线积分

(1) $\int_L (x^3-y^3)\,dx$，其中 L 是抛物线$y=x^2$上从点(1, 1)到点(3, 9)的一段弧。

解：$\int_L (x^3-y^3)\,dx=\int_1^3(x^3-x^6)\,dx$

$=(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{7}x^7)\Big|_1^3$

$=\frac{1}{4}(3^4-1)-\frac{1}{7}(3^7-1)$

(2) $\int_L y\,dx+xdy$，其中 L 为圆周$x=R\cos t$，$y=R\sin t$上对应从$\frac{\pi}{4}$到$\frac{\pi}{2}$的一段弧。

解：$\int_L y\,dx+xdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Rsint}\,d(Rcost)+\mathrm{Rcostd}(Rsint)$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-R^2\sin^2 t)dt+R^2\cos^2 tdt$

$=R^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t-\sin^2 t)dt$

$=R^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2t)dt$

$=\frac{1}{2}R^2\sin 2t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=-\frac{1}{2}R^2$

B 卷

一． 选择题：（共计 27 分，每题 3 分）

1. 平面$\begin{cases}\pi_1: 2x+3y+4z+4=0 \\ \pi_2: 2x-3y+4z-4=0\end{cases}$的位置关系是

（ D ）

A． 平行　　B．相交且垂直　　C．重合　　D．相交但不重合，不垂直

$\begin{cases}\pi_1: 法向量：n_1=\{2,3,4\} \\ : 法向量：n_2=\{2,-3,4\}\end{cases}$;显然$n_1$与$n_2$不平行，则两平面$\pi_1$与$\pi_2$不平行也不重合；

又　$n_1 \cdot n_2 = 2\times2-3\times3+4\times4=11\neq0$

所以两平面不垂直;

所以两平面应相交但不重合,不垂直;

2. 设有直线$\frac{x}{0}=\frac{y}{4}=\frac{z}{-3}$，则该直线必定

（　）

A． 过原点且垂直于 X 轴　　B．过原点且平行于 X 轴

C． 不过原点，但垂直于 X 轴　　D．不过原点，且不平行于 X 轴

$\frac{x-0}{0}=\frac{y-0}{4}=\frac{z-0}{-3}\quad\Rightarrow\quad\therefore l$经过原点；

$s=\{0,4,-3\}\Rightarrow$不平行于X轴；在X轴上取单位向量$i=\{1,0,0\}$；

则$s\cdot i=0\Rightarrow l\perp X$轴$\Rightarrow\therefore$　直线过原点且垂直于X轴；

3. 设平面π过点(1,0,-1)且与平面$4x-y+2z-8=0$平行，则平面π的方程是

（ C ）

A． $4x+y+2z-2=0$　　B． $4x-y-2z-2=0$

C． $4x-y+2z-2=0$　　　　D． $4x-y-2z+2=0$

令$\pi:4x-y+2z+k=0$　$(1,0,-1)$代入：$k=-2$　$\therefore$　$\pi:4x-y+2z-2=0$

4. 过点$M_0(1,-1,2)$且垂直于直线$l:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{1}$的平面方程为　（　）

A． $2x+3y+z-7=0$　　　　B． $2x+3y+z+1=0$

C． $2x+3y+z+7=0$　　　　D． $2x+3y+z-1=0$

π的法向量$:n=\{2,3,1\}$　;　l的方向向量：$s=\{2,3,1\}$　$\therefore$　π的方程为$2x+3y+z+D=0$

$M_0(1,-1,2)$代入π，$2\times1-3+2+D=0\Rightarrow D=-1$　$\therefore\pi$的方程为$:2x+3y+z-1=0$

5. 设 $f(x,y)=\ln[x(1+\dfrac{2}{y})]$,则$\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x=1,y=1}=$　　（　A　）

A．$-\dfrac{2}{3}$　；　B．$\dfrac{2}{3}$　；　C．$-\dfrac{3}{2}$　；　D．$\dfrac{3}{2}$　；

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{x(1+\frac{2}{y})}\cdot x(1-\frac{2}{y^2})=-\frac{2}{y(y+2)}\quad\therefore\quad\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x=1,y=1}=-\frac{2}{3};$$

6. 设$F(x,y)=xy+2\ln x+3\ln y-1\equiv0$,则$y'=$　　（　）

A．$-\dfrac{y(xy+2)}{x(xy+3)}$　；　B．$-\dfrac{x(xy+2)}{y(xy+3)}$　；　C．$-\dfrac{x(xy+3)}{y(xy+2)}$　；

D．$-\dfrac{y(xy+3)}{x(xy+2)}$　；

$$xy+2\ln x+3\ln y-1\equiv0$$

两边对x求导:

$$y+xy'+\frac{2}{x}+\frac{3}{y}y'=0\Rightarrow(x+\frac{3}{y})y'=-(y+\frac{2}{x})\Rightarrow y'=-\frac{y+\frac{2}{x}}{x+\frac{3}{y}}=-\frac{y(xy+2)}{x(xy+3)}$$

7. 设$z=\dfrac{x+y}{x-y}$,则$dz=$　　（　D　）

A. $\frac{2}{(x-y)^2}(xdx-ydy)$; B. $\frac{2}{(x-y)^2}(xdy+ydx)$;

C. $-\frac{2}{(x-y)^2}(xdx+ydy)$; D. $\frac{2}{(x-y)^2}(xdy-ydx)$;

$$z=\frac{x+y}{x-y}=1+\frac{2y}{x-y} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2y}{(x-y)^2} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2(x-y)-2y(-1)}{(x-y)^2}=\frac{2x}{(x-y)^2}$$

$$\text{则} dz=-\frac{2y}{(x-y)^2}dx+\frac{2x}{(x-y)^2}dy=\frac{2}{(x-y)^2}(xdy-ydx)$$

;

8. 设 $z=\sin^2(ax+by)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=$ （ ）

A. $2a^2\cos 2(ax+by)$; B. $2ab\cos 2(ax+by)$;

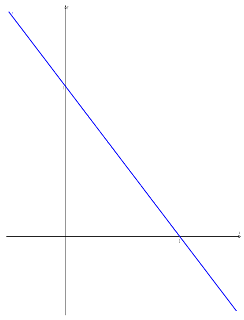
C. $2b^2\cos 2(ax+by)$; D. $2ab\sin 2(ax+by)$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2\sin(ax+by)\cos(ax+by)\cdot a=a\sin 2(ax+by)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=a\cos 2(ax+by)\cdot 2b=2ab\cos 2(ax+by)$$
;

9. 设 D 是由 X 轴，Y 轴与直线 $x+y=1$ 围成的三角形区域，则 $\iint\limits_D xydxdy=$ （ ）

A. $\frac{1}{24}$; B. $\frac{1}{12}$; C. $\frac{1}{8}$;

D. $\frac{1}{4}$;



$0 \le x \le 1 \qquad 0 \le y \le 1-x$

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (xy)dy = \int_0^1 dx(\frac{1}{2}xy^2)\Big|_0^{1-x} = \frac{1}{2}\int_0^1 [x(1-x)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)dx$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{24}$$

二． 填空题：（共计 21 分，每题 3 分）：

10. 求 函 数 ： $z = x\sin(x^2 + y)$ 的 偏 导 数 ：

$\frac{\partial z}{\partial x} =$ ________________ ； $\frac{\partial z}{\partial y} =$ ________________ ；

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(x^2 + y) + x\cos(x^2 + y)\cdot 2x = \sin(x^2 + y) + 2x^2\cos(x^2 + y) \quad ;$$

；

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(x^2 + y)$$

11. 设 $z = (1+xy)^y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{x=1,y=1} =$ ____________________ ；

$$\ln z = y\ln(1+xy) \qquad \frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy} \qquad \therefore \ \frac{\partial z}{\partial y} = (1+xy)^y[\ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy}]$$

则 $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{x=1,y=1} = (1+1)^1[\ln(1+1) + \frac{1}{1+1}] = 2(\ln 2 + \frac{1}{2}) = 1 + 2\ln 2$

；

12. 求： $z = x\ln(x+y)$ 的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$ __________________ ：

13. 函数

$f(x,y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$, 的极大值点为 ______________________ ；

$f_x'(x,y) = 4 - 2x = 0 \quad ; \quad f_y'(x,y) = -4 - 2y = 0 \Rightarrow$ 得驻点:$(2,-2)$

$f_{xx}'' = -2 = A \quad f_{xy}'' = 0 = B \quad f_{yy}'' = -2 = C \quad \Rightarrow B^2 - AC = 0 - 4 = -4 < 0$ ；

$\therefore$ 驻点:$(2,-2)$为极大值点；

14. 函数 $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 20$ 的极 __________ 值

是______________________;

$$f_x'(x,y)=2y-6x=0 \quad ; \quad f_y'(x,y)=2x-4y=0 \Rightarrow \text{得驻点}:(0,0)$$

$$f_{xx}''=-6=A \quad f_{xy}''=2=B \quad f_{yy}''=-4=C \quad \Rightarrow B^2-AC=4-24=-20<0$$

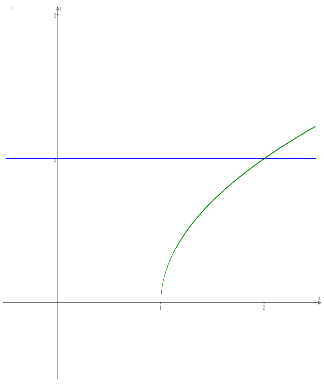
$\therefore$ 驻点$:(0,0)$为极大值点；极大值为：$z\big|_{(0,0)}=20$;

;

15. 设$D:0\le x\le 1$; $0\le y\le 2$，则$\iint\limits_D xydxdy=$__________________;

16. 设$\iint\limits_D ydxdy$；其中D是由抛物线$x=y^2+1$直线$x=0,y=0$与$y=1$所围成的区域，

则二重积分$\iint\limits_D ydxdy=$________________________;



$$\iint\limits_D ydxdy=\int_0^1 dy\int_0^{y^2+1} ydx=\int_0^1 yx\Big|_0^{y^2+1} dy=\int_0^1 y(y^2+1)dy=(\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

三．解答题：（共计 52 分）

17．（本题 8 分）设$z=\dfrac{y-x}{x+y}\ln\dfrac{y}{x}$ ，求$:x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(x+y)-(y-x)}{(x+y)^2}\ln\frac{y}{x}+\frac{y-x}{x+y}\cdot\frac{y}{x}\cdot(-\frac{y}{x^2})=\frac{-2y}{(x+y)^2}\ln\frac{y}{x}-\frac{y-x}{x(x+y)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(x+y)-(y-x)}{(x+y)^2}\ln\frac{y}{x}+\frac{y-x}{x+y}\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{2x}{(x+y)^2}\ln\frac{y}{x}+\frac{y-x}{y(x+y)}$$

$$\therefore\quad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x+y)^2}\ln\frac{y}{x}-\frac{y-x}{x+y}+\frac{2xy}{(x+y)^2}\ln\frac{y}{x}+\frac{y-x}{x+y}=0$$

18. （本题 8 分）设：$z=x\ln(x+y^2)$，求：dz；

19.（本题 8 分）求函数 $f(x,y)=\frac{1}{2}x^2-4xy+9y^2+3x-14y+\frac{1}{2}$ 的极值；

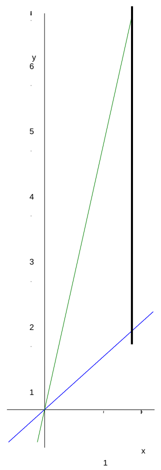
$f_x'(x,y)=x-4y=0$ ；

$f_y'(x,y)=-4x+18y-14=0\Rightarrow$ 得驻点:(1,1)

$A=f_{xx}''=1>0\quad B=f_{xy}''=-4\quad C=f_{yy}''=18\quad\Rightarrow B^2-AC=(-4)^2-18=-2<0$

$\therefore$ 驻点:(1,1)为极小值点；极小值为：$f(1,1)=\frac{1}{2}-4+9+3-14+\frac{1}{2}=-5$ ；

20. （本题 8 分）$\iint\limits_D (x+6y)dxdy$ ；其中 D 是由直线 $y=x,y=5x$ 与 $x=1$ 所围成的区域；



$D:0\le x\le 1$ ； $x\le y\le 5x$

$$\iint_D (x+6y)dxdy=\int_0^1 dx\int_x^{5x}(x+6y)dy=\int_0^1 (xy+3y^2)\Big|_x^{5x}dx=\int_0^1[(5x^2+75x^2)-(x^2+3x^2)]dx$$

$$=76\int_0^1 x^2dx=\frac{76}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{76}{3}$$

；

21. （本题 6 分）计算由椭圆抛物面 $z=x^2+y^2$，三个坐标面和平面 $x+y=1$ 所围成的立体体积；

22. （本题 8 分）判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 的收敛性；

$$\lim_{x\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^n}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<1$$

故由比值审敛法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 的收敛；

23. （本题 6 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛区间；

解：先求收敛半径 R；

$$p=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\frac{1}{n+1}}{(-1)^{n-1}\frac{1}{n}}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{n}{n+1}=1;$$

即：收敛半径 $R=\frac{1}{p}=1$；幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛区间为(−1, 1)；